

3. Operation: `insert(6)`:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

4. Operation: `insert(10)`:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

5. Operation: `delete(4)`:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

6. Operation: `delete(10)`:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

7. Operation: `insert(10)`:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

8. Operation: `insert(1)`:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	----

Aufgabe 7.2 (P) Mergesort

Sortieren Sie die Zahlenfolge 523, 126, 67, 1, 500, 34, 21, 229, 9, 123, 13 mit MergeSort. Geben Sie für jede Rekursionsebene jeweils für das Aufspalten der Teilsequenzen und für das Verschmelzen der sortierten Teilsequenzen einen Zwischenschritt an (d.h. bei dieser Eingabesequenz insgesamt circa acht Zwischenschritte), sodass Ihr Vorgehen nachvollzogen werden kann.

Wie viele Rekursionsebenen gibt es im Allgemeinen bei MergeSort (wobei wir den initialen Aufruf von MergeSort nicht als eigene Rekursionsebene zählen)? In welcher Größenordnung liegt asymptotisch der Aufwand für jede Rekursionsebene?

Aufgabe 7.3 (P) Quicksort

Die Laufzeit von Quicksort hängt von der Wahl des Pivotelements ab. Der Algorithmus aus der Vorlesung wählt immer das letzte Element als Pivotelement.

Wird in den folgenden Teilaufgaben ein anderes Element ausgewählt, vertauschen Sie dieses zunächst mit dem letzten Element und gehen Sie dann wie in der Vorlesung gezeigt vor.

Geben Sie jeweils ein Array der Länge 10 an, bei dem es besonders schlecht ist (d.h., es kommt zu vielen Vertauschungen) und ein Array der Länge 10, bei dem es besonders gut ist (wenige Vertauschungen), immer als Pivotelement

- das erste Element zu wählen.
- den Median aus dem ersten, letzten und mittleren Element zu wählen, d.h. bei einem Array A der Länge n den Median aus den Elementen $A[0]$, $A[\lfloor (n-1)/2 \rfloor]$ und $A[n-1]$. Der Median ist der mittlere Wert: Z.B. ist es bei $[2, 1, 10]$ der Wert 2 (also nicht der Mittelwert). Ein zweielementiges Array wird direkt ohne Pivotelement sortiert, d.h. $[2, 1]$ wird durch eine Vertauschung zu $[1, 2]$.

Begründen Sie jeweils Ihre Antwort.

- c) Sortieren Sie das Array $[5, 4, 6, 7, 3, 2, 8, 9, 1]$ mit Quicksort. Wählen Sie als Pivot-Element jeweils das letzte Element bzw. den Median **wie in Teil b)**.

Aufgabe 7.4 (E) Datenstruktur Amore

Wir betrachten als Datenstruktur eine Liste L von Zahlen mit folgenden Operationen.

1. Die Methode $L.\text{pushBack}(i)$ hängt die Zahl i an das Ende der Liste L .
2. Die Methode $L.\text{popFront}()$ entfernt das erste Element der Liste und gibt es zurück.
3. Die Methode `findMinimum`, die im Folgenden aufgelistet ist.

```

Input: unsigned int  $m$ 
1 int  $min := \infty$ 
2 int  $counter := 0$ 
3 while  $L$  ist nicht leer und  $counter \neq m$  do
4   | int  $nextElement := L.\text{popFront}()$ 
5   | if  $nextElement < min$  then
6   |   |  $min := nextElement$ 
7   | end
8   |  $counter := counter + 1$ 
9 end
10 return  $min$ 

```

Jede Elementar-Operation (d.h. Zuweisung, Vergleich etc.), die innerhalb von `findMinimum` verwendet wird, soll konstante Laufzeit haben. Weiterhin soll innerhalb der Liste ein Zeiger auf das letzte Element vorhanden sein, so dass `pushBack` in konstanter Zeit ausgeführt wird.

- (a) Ermitteln Sie die jeweilige Worst-Case-Laufzeit der Operationen `pushBack` und `findMinimum` bei einer Operationsfolge der Länge k . Berechnen Sie daraus eine pessimistische Abschätzung für die Worst-Case-Laufzeit von Operationsfolgen der Länge k .
- (b) Zeigen Sie mithilfe einer amortisierten Analyse, dass die amortisierte Laufzeit der Operationen `pushBack` und `findMinimum` konstant (d.h. in $\mathcal{O}(1)$) ist, und bestimmen Sie die Laufzeit für Operationsfolgen der Länge k .

Aufgabe 7.5 (H) Radixsort - Diese Aufgabe zählt für den Notenbonus.

Sie finden die Aufgabe und weitere wichtige Informationen unter <https://artemis.ase.in.tum.de/courses/256/exercises/9990>. Warten Sie mit Verständnisfragen bitte, bis das Thema in der Vorlesung bzw. in der Übung besprochen wurde. Hier werden sich die meisten Fragen von alleine klären.